

TD₂₁ – Courbes et surfaces de l'espace

Exercice 1 ★

On considère la surface $\mathcal{S}$ paramétrée par
$$\begin{cases} x(u, v) &= u^2 + uv + v^2 \\ y(u, v) &= u + v \\ z(u, v) &= u^3 + v^3 \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{S}$.
2. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $A(1, 0, 0)$.

Exercice 2 ★★

On considère la surface $\mathcal{S}$ paramétrée par
$$\begin{cases} x(u, v) &= \frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ y(u, v) &= \frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ z(u, v) &= \frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)} \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

Exercice 3 ★

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{S}$.
2. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $A(3, 0, 0)$.

Exercice 4 ★★

Soit $(S_1) : x^2 - y^2 + 2xz - 2yz - 2x - \frac{1}{3} = 0$ et $(S_2) : x^2 - y^2 + 2xz - 2yz = 0$.

1. Montrer que (S_2) est la réunion de deux plans dont on précisera l'intersection (D) .
2. Déterminer le point de (S_1) en lequel le plan tangent à (S_1) est orthogonal à (D) .

Exercice 5 ★★

Pour $t \in \mathbb{R}$ on considère la droite $\mathcal{D}_t$ de l'espace passant par le point $A_t(t, t, t^2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}_t(0, 2, t)$. On note $\mathcal{S}$ la surface réglée engendrée par la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$

1. Déterminer une paramétrisation de $\mathcal{S}$
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$

Exercice 6 ★★★

Soit $\mathcal{S}$ la surface de l'espace d'équation $(x + z)^2 + 2y^2 = 2$

1. Soit $M_0 \in \mathcal{S}$. Déterminer les droites tracées sur $\mathcal{S}$ passant par M_0 .
2. La surface $\mathcal{S}$ est-elle réglée ?

Exercice 7 ★★★

Soit Δ la droite d'équations $x = y = z$ et D la droite d'équations
$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y - 2z = 1 \end{cases}.$$

1. Vérifier que ces deux droites ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation de la surface de révolution engendrée par la rotation de D autour de Δ .

Exercice 8 ★★★

Soit (C) la courbe d'équations $\begin{cases} x = z^2 + 2z \\ y = 2z^2 - z \end{cases}$ On considère le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, avec $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -5)$, $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$.

1. Déterminer les équations de (C) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Que reconnaît-on ?
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution engendrée par la rotation de (C) autour l'axe $y = 2x, z = 0$.

Exercice 9 ★★★

Déterminer une équation cartésienne de la surface (S) de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe $x = y = z$ de la courbe C paramétrée par $x = t, y = t^2$ et $z = -t^2$.

Exercice 10 ★★★★★

Soit $(\Gamma) : \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \\ z(t) = \cos(2t) \end{cases}$, pour $t \in [0, 2\pi]$.

1. Déterminer un paramétrage de la surface (S) de révolution engendrée par la rotation de (Γ) autour de l'axe (Oz) .
2. Déterminer une équation de la surface (S) de révolution engendrée par la rotation de (Γ) autour de l'axe (Oz) .

Exercice 11 ★★

Déterminer et dessiner les projections orthogonales sur chacun des plans de coordonnées de l'hélice circulaire paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12 ★★★

Soit (S) la surface paramétrée par $\begin{cases} x(u, v) = u^2 \\ y(u, v) = uv \\ z(u, v) = 2u + v \end{cases}$, avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que (S) est une surface réglée.
2. Déterminer l'ensemble des points de (S) tels que le plan tangent à (S) soit parallèle à l'axe (Ox) .
3. Donner une équation cartésienne de (S) .

Exercice 13 ★★

Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z^3 = xy$ qui contiennent la droite $\mathcal{D} : x = 2, y = 3z - 3$.

Exercice 14 ★★

On considère la surface S définie par l'équation cartésienne $x^4 - y^2 + xz = 1$.

1. Donner les éléments de symétrie de la surface S .
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de l'intersection avec le plan d'équation $x = \alpha$.
3. Soit la courbe Γ définie par $\begin{cases} x^4 - y^2 + xz = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$. Déterminer la tangente à Γ au point $A(1, 1, 1)$.

Exercice 15 ★★

Soit S la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et D la droite définie par $y = 3x, z = -2x$. Déterminer les plans tangents à la surface S et orthogonaux à la droite D .

Exercices issus d'oraux

Exercice 16 ★★

(Oral 2008)

Soit D la droite d'équations $x = y = z$ et $\mathcal{C}$ la courbe d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$.

Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution obtenue par rotation de $\mathcal{C}$ autour de D .

Exercice 17 ★★

(Oral 2019)

Soit (S) la surface d'équation $2x^2 - 3yz + 4z - 1 = 0$

1. Déterminer les points réguliers de (S) .
2. Déterminer une équation du plan tangent à (S) en un point $M(a, b, c)$.
3. Déterminer les plans tangents contenant la droite d'équations $\begin{cases} y = 2 \\ x = z \end{cases}$

Exercice 18 ★★★

(Oral 2016)

Soit $M(t)$ le point de l'espace de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ où x, y et z sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $u'' + u = 1$ qui vérifient

$$x(0) = 2, \quad x'(0) = 3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3, \quad z(0) = 5, \quad z'(0) = 0$$

On note Γ la courbe décrite par le point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $x(t), y(t)$ et $z(t)$ pour tout réel t
2. Montrer que Γ est incluse dans un plan et donner une équation cartésienne de ce plan
3. Montrer que Γ est incluse dans une sphère et donner une équation cartésienne de cette sphère
4. En déduire que Γ est un cercle. Donner le centre et le rayon de ce cercle.

Exercice 19 ★★★

(Oral 2018)

Soit D la droite d'équations $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ et Δ la droite d'équations $\begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}$

1. De quelle nature sont D et Δ ?
2. On note D_θ (respectivement Δ_θ) l'image de D (respectivement Δ) par la rotation d'angle θ d'axe dirigé et orienté par $\vec{k}$.
 - (a) Donner une équation de D_θ
 - (b) Soit (S) d'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Montrer que (S) est la réunion de droites D_θ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de (S) . Donner l'équation du plan tangent à (S) en M_0 .

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. Posons $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

On calcule les dérivées partielles de f par rapport à u et v .

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = (2u + v, 1, 3u^2), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = (2v + u, 1, 3v^2)$$

Un point $M(u, v)$ est singulier si et seulement si la famille $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$ est liée donc si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) &= (3v^2 - 3u^2, 3u^2(2v + u) - 3v^2(2u + v), u - v) \\ &= (-3(u - v)(u + v), 6u^2v + 3u^3 - 6uv^2 - 3v^3, u - v) \\ &= (-3(u - v)(u + v), (u - v)(6uv + 3u^2 + 3uv + 3v^2), u - v) \\ &= (u - v)(-3(u + v), 3u^2 + 9uv + 3v^2, 1) \end{aligned}$$

On a ainsi $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0_{\mathbb{R}^3}$ si et seulement si $u = v$.

Finalement les points réguliers de $\mathcal{S}$ sont les points $M(u, v)$ avec $u \neq v$.

2. Constatons d'abord que $A(1, 0, 0)$ appartient bien à $\mathcal{S}$, il s'agit du point $M(1, -1)$ et également du point $M(-1, 1)$, c'est une point double. Puisque $1 \neq -1$, A est un point régulier de $\mathcal{S}$.

Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en A est le plan passant par A et de vecteur normal $\left(\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right)(1, -1)$.

Ici

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right)(1, -1) = (0, 6, -2)$$

Ainsi, en notant $\mathcal{P}$ le plan tangent à $\mathcal{S}$ en A on a

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -3y + z = 0$$

$\mathcal{P}$ est donc le plan d'équation $-3y + z = 0$

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit $f : (u, v) \mapsto \left(\frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)}, \frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)}, \frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)}\right)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{-\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)}, \frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)}, 0\right), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\cos(u) \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(v)}, \frac{\sin(u) \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(v)}, \frac{1}{\operatorname{ch}(v)^2}\right)$$

Et donc

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right)(u, v) = \left(\frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}^3(v)}, \frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}^3(v)}, \frac{-\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}^3(v)}\right)$$

On sait que $\cos(u)^2 + \sin(u)^2 = 1$, ainsi $\cos(u)$ et $\sin(u)$ ne peuvent pas être simultanément nuls et donc tous les points sont réguliers.

2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

Notons que la fonction $\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$ de bijection réciproque

$$\operatorname{argth} : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

On a

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \exists(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = \frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ y = \frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ z = \frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = \frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ y = \frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ z \in]-1, 1[\\ v = \operatorname{argth}(z) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = \cos(u)\sqrt{1-z^2} \\ y = \sin(u)\sqrt{1-z^2} \\ v = \operatorname{argth}(z) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(u) = \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} \\ \sin(u) = \frac{y}{\sqrt{1-z^2}} \\ v = \operatorname{argth}(z) \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a vu en première année que, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe u tel que $a = \cos(u)$ et $b = \sin(u)$ si et seulement $a^2 + b^2 = 1$

Ainsi

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow z \in]-1, 1[\quad \text{et} \quad \frac{x^2 + y^2}{1 - z^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Finalement $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, i.e. la sphère unité.

Corrigé de l'exercice 3

1. Posons $f : (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2)$ de sorte que $\mathcal{S}$ soit la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\nabla f(x, y, z) = (4x(x^2 + y^2 + z^2 - 5), 4y(x^2 + y^2 + z^2 - 5), 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 3))$$

Un point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{S}$ est régulier si et seulement si $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

On a

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2 + y^2 + z^2 - 5) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 + z^2 - 5) = 0 \\ 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 3) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 3) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 3) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 4z(z^2 + 3) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 4z(z^2 + 3) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $z = 0$ et $x^2 + y^2 = 5$ ou bien si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Par ailleurs le point $(0, 0, 0)$ n'appartient pas à $\mathcal{S}$ et, si $z = 0$ et $x^2 + y^2 = 5$ alors

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = (5 + 3)^2 - 16 \times 5 = 64 - 80 = -16 \neq 0$$

Finalement $\mathcal{S}$ n'a pas de points singuliers.

2. Tout d'abord vérifions que $A \in \mathcal{S}$.

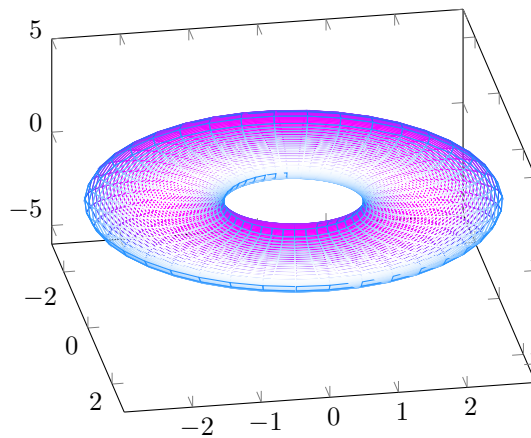
On a $(3^2 + 0^2 + 0^2 + 3)^2 - 16(3^2 + 0^2) = 144 - 16 \times 9 = 0$ donc $A \in \mathcal{S}$.

On a alors

$$\nabla f(3, 0, 0) = (48, 0, 0)$$

Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $A(3, 0, 0)$ est donc le plan d'équation $48(x - 3) + 0(y - 0) + 0(z - 0)$, i.e. le plan d'équation $x = 3$.

Figure .1 – La surface $\mathcal{S}$, un tore



Corrigé de l'exercice 4

1. On a

$$x^2 - y^2 + 2xz - 2yz = (x - y)(x + y) + 2z(x - y) = (x - y)(x + y + 2z)$$

Ainsi (S_2) est la réunion des plans d'équations respectives $x - y = 0$ et $x + y + 2z = 0$.

L'intersection de ces deux plans est donc la droite $D : \begin{cases} x = y \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$.

2. Les points $A(0, 0, 0)$ et $B(1, 1, -1)$ appartiennent à (D) , ainsi D est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1, 1, -1)$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de (S_1) , le plan tangent à (S_1) en $M(x, y, z)$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{v}(2x + 2z - 2, -2y - 2z, 2x - 2y)$.

Le plan tangent est alors orthogonal à (D) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, i.e. si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On cherche ainsi les points $M(x, y, z)$ tels que

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x^2 - y^2 + 2xz - 2yz - 2x - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

On trouve comme unique solution le point $M\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Corrigé de l'exercice 5

1. La droite $\mathcal{D}_t$ de l'espace passant par le point $A_t(t, t, t^2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}_t(0, 2, t)$ a pour représentation paramétrique

$$\mathcal{D}_t = \{(t, t + 2s, t^2 + ts), s \in \mathbb{R}\}$$

On en déduit une paramétrisation de $\mathcal{S}$ par
$$\begin{cases} x(y, s) = t \\ y(t, s) = t + 2s \\ z(t, s) = t^2 + ts \end{cases}.$$

2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace, on a

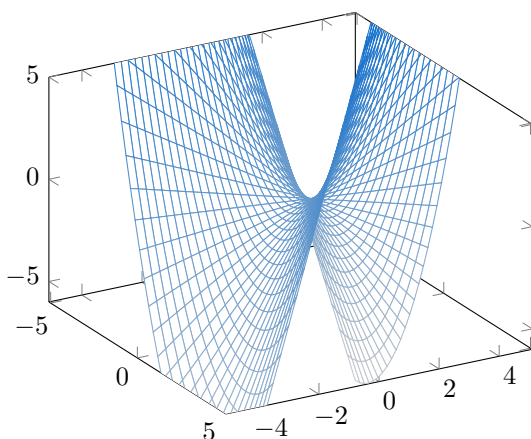
$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = t + 2s \\ z = t^2 + ts \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} t = x \\ y = x + 2s \\ z = x^2 + xs \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} t = x \\ s = \frac{y - x}{2} \\ z = x^2 + x \frac{y - x}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} t = x \\ s = \frac{y - x}{2} \\ x^2 + xy - 2z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'égalité $x^2 + xy - 2z = 0$ ne dépend pas de (t, s) et, (x, y, z) étant donnés, il existe toujours (t, s) tels que $t = x$ et $s = \frac{y - x}{2}$. Ainsi

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x^2 + xy - 2z = 0$$

$\mathcal{S}$ est donc la surface d'équation cartésienne $x^2 + xy - 2z = 0$. Cette surface est un parabolôïde hyperbolique, c'est exactement le type de forme qu'ont les Pringles.

Figure .2 – La surface $\mathcal{S}$, un parabolôïde hyperbolique



Corrigé de l'exercice 6

1. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ et $\vec{u}(a, b, c)$.

La droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ est incluse dans $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x_0 + at + z_0 + ct)^2 + 2(y_0 + bt)^2 = 2$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ((a+c)^2 + 2b^2)t^2 + (2(x_0 + z_0)(a+c) + 4y_0b)t + (x_0 + z_0)^2 + 2y_0^2 - 2 = 0$$

Ou encore, puisque $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ((a+c)^2 + 2b^2)t^2 + (2(x_0 + z_0)(a+c) + 4y_0b)t = 0$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme on a alors $(a+c)^2 + 2b^2 = 0$ et $2(x_0 + z_0)(a+c) + 4y_0b = 0$.

Ainsi $b = 0$ et $a = -c$.

Réciproquement si $\vec{u}(1, 0, -1)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$(x_0 + at + z_0 - at)^2 + 2y_0^2 = (x_0 + z_0)^2 + 2y_0^2 = 2$$

Ainsi la seule droite par M_0 incluse dans $\mathcal{S}$ est la droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}(1, 0, -1)$.

2. Soit $M(x, y, z)$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow (x+z)^2 + 2y^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \frac{x+z}{\sqrt{2}} = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\theta, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x+z = \sqrt{2}\cos(\theta) \\ t = x \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\theta, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = t \\ y = \sin(\theta) \\ z = \sqrt{2}\cos(\theta) - t \end{cases} \end{aligned}$$

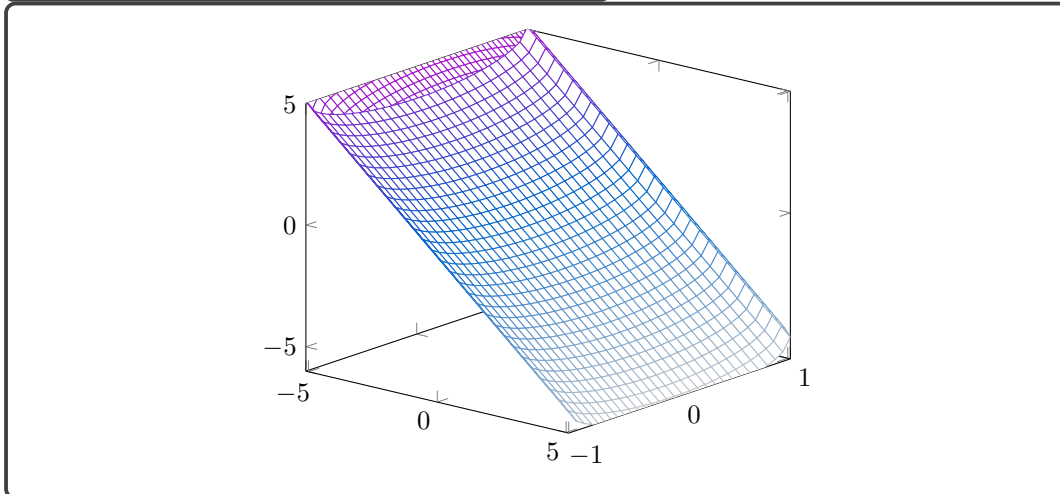
Notons M_θ le point de coordonnées $(0, \sin(\theta), \sqrt{2}\cos(\theta))$ et D_θ la droite passant par M_θ et dirigée par $\vec{u}(1, 0, -1)$.

D_θ a pour représentation paramétrique

$$D_\theta = \{M(t, \sin(\theta), \sqrt{2}\cos(\theta) - t), t \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M \in D_\theta$.

On en déduit que $\mathcal{S} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} D_\theta$. $\mathcal{S}$ est donc une surface réglée.

Figure .3 – La surface $\mathcal{S}$, un cylindre elliptique

Corrigé de l'exercice 7

1. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(1, 1, 1)$ et un vecteur directeur de D est $\vec{v}(1, 2, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites Δ et D ne sont pas parallèles.

Si les deux droites étaient sécantes, on aurait alors $0 = 2$, ce qui est impossible.

Les deux droites ne sont ni sécantes, ni parallèles, elles sont donc non coplanaires.

2. Notons $\mathcal{S}$ la surface de révolution engendrée par la rotation de D autour de Δ .

On a alors $M \in \mathcal{S}$ si et seulement si il existe $M' \in \mathcal{C}$ tel que $\begin{cases} OM = OM' \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$

où $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ qui dirige Δ .

Ainsi

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} X = Z + 2 \\ Y = 2Z + 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ (X - x) + (Y - y) + (Z - z) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} X = Z + 2 \\ Y = 2Z + 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ x + y + z = Z + 2 + 2Z + 1 + Z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} X = Z + 2 \\ Y = 2Z + 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ Z = \frac{x + y + z - 3}{4} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} Z = \frac{1}{4}(x + y + z - 3) \\ X = \frac{1}{4}(x + y + z + 5) \\ Y = \frac{1}{2}(x + y + z - 1) \\ 16(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z - 3)^2 + (x + y + z + 5)^2 + 4(x + y + z - 1)^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La condition $16(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z - 3)^2 + (x + y + z + 5)^2 + 4(x + y + z - 1)^2$ ne fait pas intervenir (X, Y, Z) et, à (x, y, z) fixés, il existe toujours (X, Y, Z) tels que

$$\begin{cases} Z = \frac{1}{4}(x+y+z-3) \\ X = \frac{1}{4}(x+y+z+5) \\ Y = \frac{1}{2}(x+y+z-1) \end{cases}$$

Ainsi $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$ si et seulement $5(x^2 + y^2 + z^2) - 6(xy + yz + xz) + 2(x + y + z) - 19 = 0$

Corrigé de l'exercice 8

1. On se place dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -5)$, $\vec{i} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ et $\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$.

Notons $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$

Soit M un point de l'espace, (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (X, Y, Z) ses coordonnées dans le nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

Les formules de changement de base donnent $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, i.e.

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{6}}Y + \frac{2}{\sqrt{30}}Z, y = \frac{2}{\sqrt{5}}X - \frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{1}{\sqrt{30}}Z, z = \frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{5}{\sqrt{30}}Z$$

On a alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = z^2 + 2z \\ y = 2z^2 - z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = (z + 1)^2 \\ y - 2x = -5z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{6}}Y + \frac{2}{\sqrt{30}}Z + 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{5}{\sqrt{30}}Z + 1\right)^2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}}X - \frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{1}{\sqrt{30}}Z - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{6}}Y + \frac{2}{\sqrt{30}}Z\right) = -5\left(\frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{5}{\sqrt{30}}Z\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}X + 10\sqrt{6}Y + 2Z + 30 = \left(\sqrt{5}Y - 5Z + \sqrt{30}\right)^2 \\ Z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}X + 10\sqrt{6}Y + 30 = \left(\sqrt{5}Y + \sqrt{30}\right)^2 \\ Z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}X = 5Y^2 \\ Z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Y^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}X \\ Z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{C}$ dans le nouveau repère est $\begin{cases} Y^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}X \\ Z = 0 \end{cases}$.

On reconnaît l'équation d'une parabole dans le plan d'équation $Z = 0$

2. Notons $\mathcal{S}$ la surface recherchée. On a

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists M' \in \mathcal{C} \quad \begin{cases} OM = OM' \\ \langle \overrightarrow{MM'}, \vec{u} \rangle = 0 \end{cases}$$

où $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} a = c^2 + 2c \\ 2a - b - 5c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + 2y = a + 2b \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} a = c^2 + 2c \\ b = 2c^2 - c \\ a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + 2y = 5c^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} a = c^2 + 2c \\ b = 2c^2 - c \\ 5c^4 + 6c^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + 2y = 5c^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} a = c^2 + 2c \\ b = 2c^2 - c \\ \frac{x + 2y}{5}(x + 2y + 6) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + 2y = 5c^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} a = c^2 + 2c \\ b = 2c^2 - c \\ 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 = (x + 2y)(x + 2y + 6) \\ c^2 = x + 2y \end{cases}
 \end{aligned}$$

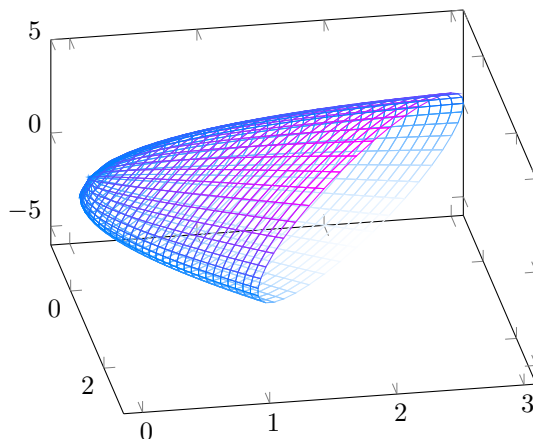
La condition $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 = (x + 2y)(x + 2y + 6)$ ne dépend pas de (a, b, c) . Si cette condition est réalisée alors

$$\begin{aligned}
 6(x + 2y) &= 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - (x + 2y)^2 \\
 &= 4x^2 + y^2 - 4xy + 5z^2 \\
 &= (2x - y)^2 + 5z^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

On a ainsi $x + 2y \geq 0$, il existe donc bien $c \in \mathbb{R}$ tel que $c^2 = x + 2y$ et, par suite, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = c^2 + 2c$ et $b = 2c^2 - c$.

Finalement $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 = (x + 2y)(x + 2y + 6)$.

Figure .4 – La surface $\mathcal{S}$, un parabolôïde elliptique



Corrigé de l'exercice 9

Posons $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. On a

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists M'(X, Y, Z) \in \mathcal{C} \quad \begin{cases} OM = OM' \\ \langle \overrightarrow{MM'}, \vec{u} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} X = t \\ Y = t^2 \\ Z = -t^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ x + y + z = X + Y + Z \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} X = t \\ Y = t^2 \\ Z = -t^2 \\ t = x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2(2t^2 + 1) \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} X = t \\ Y = t^2 \\ Z = -t^2 \\ t = x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2(2(x + y + z)^2 + 1) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2(2(x + y + z)^2 + 1)$$

Une équation de $(\mathcal{S})$ est donc $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2(1 + 2(x + y + z)^2)$.

Corrigé de l'exercice 10

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ la rotation d'angle θ d'axe (Oz) orientée par $\vec{k}$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, l'image du point $M(\cos^3(t), \sin^3(t), \cos(2t))$ par la rotation d'angle θ d'axe (Oz) orientée par $\vec{k}$ est le point de coordonnées

$$(\cos(\theta) \cos^3(t) - \sin(\theta) \sin^3(t), \sin(\theta) \cos^3(t) + \cos(\theta) \sin^3(t), \cos(2t))$$

On en déduit une paramétrage de (S) par $\begin{cases} x(t, \theta) = \cos(\theta) \cos^3(t) - \sin(\theta) \sin^3(t) \\ y(t, \theta) = \sin(\theta) \cos^3(t) + \cos(\theta) \sin^3(t) \\ z(t, \theta) = \cos(2t) \end{cases}$, pour $(t, \theta) \in [0, 2\pi]^2$

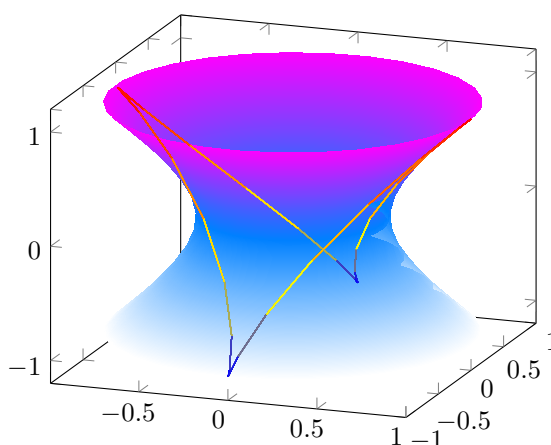
2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace, on a

$$\begin{aligned}
 M \in (S) &\Leftrightarrow \exists M' \in (\Gamma) \quad \begin{cases} OM = OM' \\ \langle \overrightarrow{MM'}, \vec{k} \rangle = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \cos^6(t) + \sin^6(t) + \cos^2(2t) \\ z = \cos(2t) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \cos^6(t) + (1 - \cos^2(t))^3 \\ z = 2\cos^2(t) - 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{(z+1)^3}{8} + \frac{(1-z)^3}{8} \\ \cos^2(t) = \frac{z+1}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} 8x^2 + 8y^2 = 6z^2 + 2 \\ \cos^2(t) = \frac{z+1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Or, il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que $\cos^2(t) = \frac{z+1}{2}$ si et seulement si $\frac{z+1}{2} \in [0, 1]$, i.e. si et seulement $z \in [-1, 1]$.

Finalement la surface S a pour équations $8x^2 + 8y^2 = 6z^2 + 2$ pour $z \in [-1, 1]$

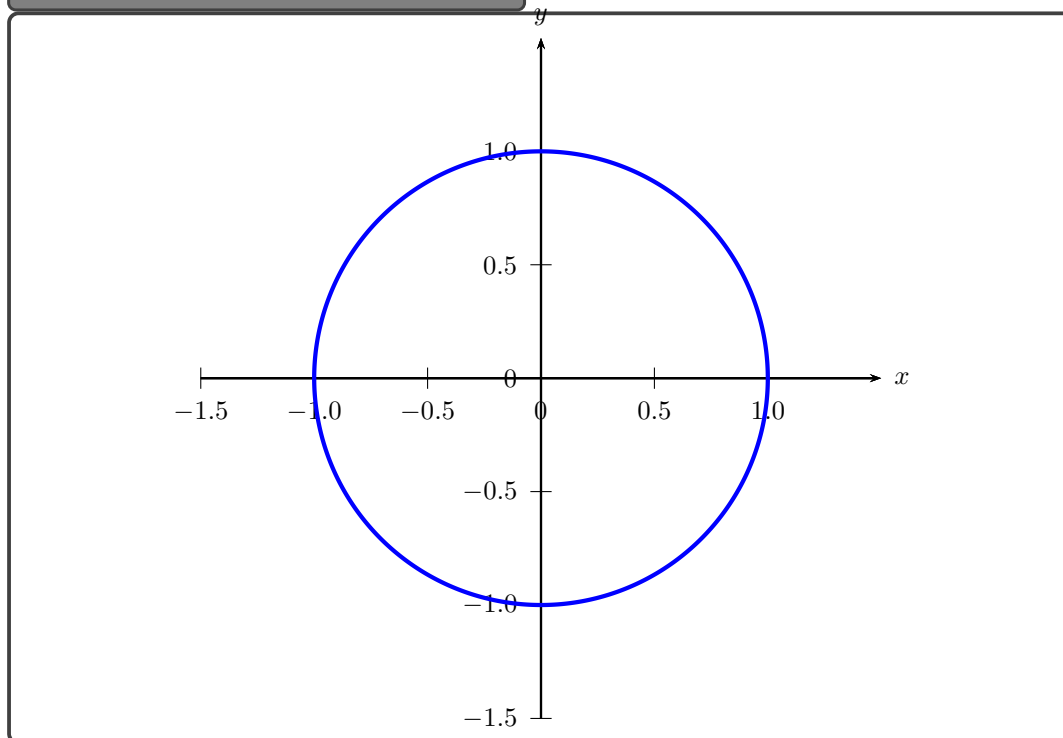
Figure .5 – La surface S , une partie d'hyperboloïde de révolution à une nappe et Γ



Corrigé de l'exercice 11

— La projection sur le plan (xOy) est le cercle paramétrée par $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ c'est-à-dire}$

le cercle d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ D'où le tracé

Figure .6 – Projection sur le plan (xOy) 

- Les projections sur les plans (xOz) et (yOz) sont les deux sinusoides paramétrées respectivement par $\begin{cases} x = \cos z \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = \sin z \end{cases}$ D'où les tracés

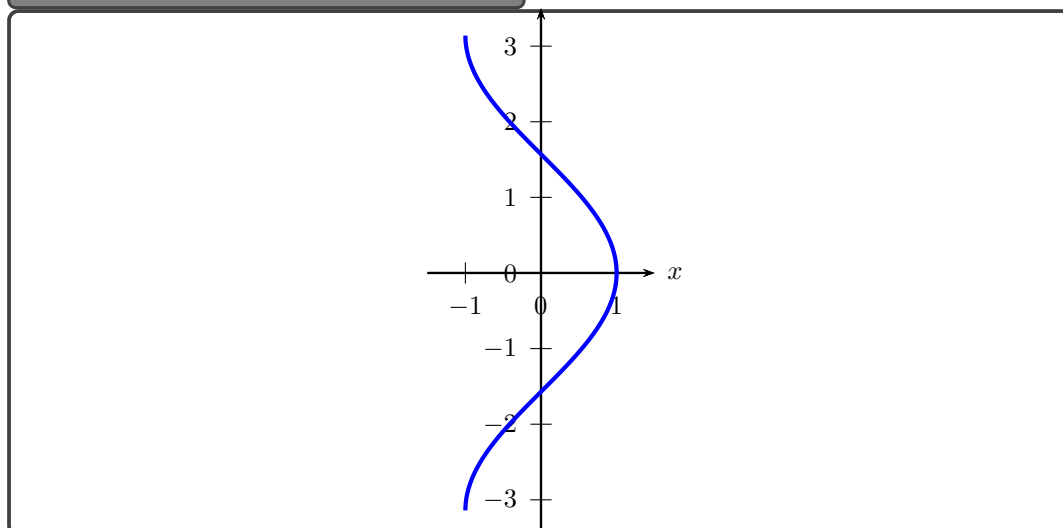
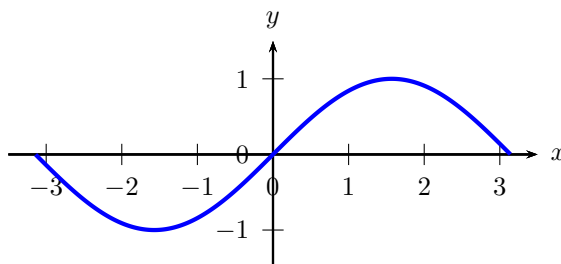
Figure .7 – Projection sur le plan (xOz) 

Figure .8 – Projection sur le plan (yOz) 

Corrigé de l'exercice 12

Soit $(S) : \begin{cases} x = u^2 \\ y = uv \\ z = 2u + v \end{cases}, (u; v) \in \mathbb{R}^2.$

1. Pour $u \in \mathbb{R}$, notons M_u le point de coordonnées $(u^2, 0, 2u)$ et D_u la droite passant par M_u et dirigée par le vecteur $u\vec{j} + \vec{k}$.

D_u a alors comme représentation paramétrique

$$D_u = \{M(u^2, uv, 2u + v), v \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi $(S) = \bigcup_{u \in \mathbb{R}} D_u$, (S) est donc une surface réglée.

2. Soit $M(u, v)$ un point de (S) .

$\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$ a pour coordonnées $(v - 2u, -2u, 2u^2)$. Ainsi le seul point singulier de la surface est le point O de paramètres $(0, 0)$.

Les autres points sont réguliers et $\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$ est un vecteur normal au plan tangent en ces points.

Le plan tangent est parallèle à l'axe (Ox) si et seulement si $\langle \vec{i}, \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \rangle = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $v = 2u$.

L'ensemble des points de (S) tels que le plan tangent soit parallèle à (Ox) est donc la courbe

de paramétrage $\begin{cases} x = u^2 \\ y = 2u^2 \\ z = 4u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$

3. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

Si $M(x, y, z) \in (S)$ alors il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = u^2, y = uv$ et $z = 2u + v$. Ainsi $v = z - 2u, y = uz - 2u^2$ et $x = u^2$, ou encore $v = z - 2u, y + 2x = uz, x = u^2$

Ainsi $(y + 2x)^2 = xz^2$.

Réciproquement, soit $M(x, y, z)$ tel que $(y + 2x)^2 = xz^2$. Comme x est positif, il existe un unique réel $u \geq 0$ tel que $x = u^2$. On a alors $(y + 2x)^2 = u^2 z^2$.

Donc $y + 2x = uz$ ou $y + 2x = -uz$.

- Si $y = uz - 2x$ alors $y = u(z - 2u)$. En posant $v = z - 2u$, on a bien $x = u^2, y = uv$ et $z = 2u + v$, donc $M(x, y, z) \in (S)$.
- Si $y = -2x - uz$ alors $y = -u(2u + z)$. En posant $u' = -u$ et $v = z - 2u'$, on a bien $x = u'^2, y = u'v$ et $z = 2u' + v$, donc $M(x, y, z) \in (S)$.

Finalement $M(x, y, z) \in (S)$ si et seulement si $(y + 2x)^2 = xz^2$. Une équation cartésienne de (S) est donc $(y + 2x)^2 = xz^2$.

Corrigé de l'exercice 13

Soit $f(x, y, z) = xy - z^3$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a $\nabla f(x, y, z) = (y, x, -3z^2)$.

On a $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $x = y = z = 0$. De plus $O(0, 0, 0)$ appartient à $\mathcal{S}$. O est le seul point singulier de la surface.

On considère désormais $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$ avec $M \neq O$. On a alors $x_0 y_0 = z_0^3$.

Une équation du plan tangent en M_0 est $y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - 3z_0^2(z - z_0) = 0$.

Ce plan contient la droite (D) d'équation $x = 2, y = 3z - 3$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $y_0(2 - x_0) + x_0(3z - 3 - y_0) - 3z_0^2(z - z_0) = 0$.

Ce qui équivaut à

$$\forall z \in \mathbb{R}, z(3x_0 - 3z_0^2) + y_0(2 - x_0) - x_0(3 + y_0) + 3z_0^3 = 0$$

Il s'agit d'une relation polynomiale en z . Par unicité des coefficients celle-ci est vraie si et seulement si $x_0 = z_0^2$ et $2y_0 - x_0 y_0 - 3x_0 - x_0 y_0 + 3z_0^3 = 0$.

Ainsi le plan tangent en M_0 contient la droite (D) si et seulement si $\begin{cases} x_0 y_0 = z_0^3 \\ x_0 = z_0^2 \\ 2y_0 - x_0 y_0 - 3x_0 - x_0 y_0 + 3z_0^3 = 0 \end{cases}$.

Or

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_0 y_0 = z_0^3 \\ x_0 = z_0^2 \\ 2y_0 - 2x_0 y_0 - 3x_0 + 3z_0^3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 y_0 = z_0^3 \\ x_0 = z_0^2 \\ 2y_0 - 3x_0 + z_0^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_0^2(y_0 - z_0) = 0 \\ x_0 = z_0^2 \\ 2y_0 - 3x_0 + z_0^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 0 \\ x_0 = z_0^2 \\ 2y_0 - 3x_0 + z_0^3 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_0 = z_0 \\ x_0 = z_0^2 \\ 2y_0 - 3x_0 + z_0^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 0 \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_0 = z_0 \\ x_0 = z_0^2 \\ 2z_0 - 3z_0^2 + z_0^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = z_0 \\ x_0 = z_0^2 \\ z_0(z_0 - 1)(z_0 - 2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par hypothèse
 $M_0 \neq O$

Ainsi le plan contient la droite (D) d'équations $x = 2, y = 3z - 3$ si et seulement si $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$, ce qui donne comme équation du plan tangent $x + y - 3z + 1 = 0$ ou $x_0 = 4, y_0 = 2, z_0 = 2$, ce qui donne comme équation du plan tangent $x + 2y - 6z + 4 = 0$.

Corrigé de l'exercice 14

1. Soit $M(x, y, z)$ un point de S alors $M'(-x, -y, -z)$ appartient à S , S est donc invariante par la symétrie de centre O .

$M''(x, -y, z)$ appartient également à S , S est donc invariante par la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $y = 0$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note P_α le plan d'équation $x = \alpha$.

Soit $M(x, y, z) \in (S) \cup P_\alpha$, on a alors $x = \alpha$ et $\alpha^4 - y^2 + \alpha z = 1$ ou encore $x = \alpha$, $y^2 = \alpha z + \alpha^4 - 1$

L'intersection est vide pour $\alpha = 0$.

Pour $\alpha \neq 0$, l'intersection est la parabole d'équation $y^2 = \alpha z + \alpha^4 - 1$ incluse dans le plan P_α .

3. On a bien $A \in \Gamma$. Posons $f(x, y, z) = x^4 - y^2 + xz - 1$ et $g(x, y, z) = 2x + y + z - 4$.

On a alors $\nabla f(x, y, z) = (4x^3 + z, -2y, x)$ et $\nabla g(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

Ainsi $\nabla f(x, y, z) \wedge \nabla g(x, y, z) = (-2y - x, 2x - 4x^3 - z, 4x^3 + z + 4y)$.

Au point A cela donne $\nabla f(1, 1, 1) \wedge \nabla g(1, 1, 1) = (-3, -3, 9) \neq (0, 0, 0)$.

Le point A est ainsi un point régulier de la courbe Γ . La tangente à Γ en A est la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{\nabla} f(1, 1, 1) \wedge \vec{\nabla} g(1, 1, 1) = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k}$ (ou bien dirigée par $\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$).

Un paramétrage de cette tangente est
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 15

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$.

On a $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 4z)$. Ainsi $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $x = y = z = 0$

Or $O(0, 0, 0)$ n'appartient pas à S , tous les points de l'ellipsoïde sont donc réguliers.

Un vecteur normal $\vec{n}_0$ au plan tangent au point $M(x_0, y_0, z_0)$ a pour coordonnées $(x_0, y_0, 2z_0)$.

La droite D est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1, 3, -2)$.

Ainsi le plan tangent en $M(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal à (D) si et seulement si $\vec{n}_0$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, i.e. si et seulement si $\vec{n}_0 \wedge \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{n}_0 \wedge \vec{u}$ a pour coordonnées $(-2y_0 - 6z_0, 2x_0 + 2z_0, y_0 - 3x_0)$.

Ainsi le plan tangent au point $M(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal à D si et seulement si
$$\begin{cases} y_0 + 3z_0 = 0 \\ x_0 + z_0 = 0 \\ y_0 = 3x_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \end{cases}$$

Or

$$\begin{cases} y_0 + 3z_0 = 0 \\ x_0 + z_0 = 0 \\ y_0 = 3x_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = -x_0 \\ y_0 = 3x_0 \\ 12x_0^2 = 1 \end{cases}$$

Les plans recherchés sont donc les plans tangents aux points de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}\right)$ et $\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{-3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

Il s'agit donc des plans d'équations respectives $x + 3y - 2z = \sqrt{12}$ et $x + 3y - 2z = -\sqrt{12}$.

Corrigé de l'exercice 16

Notons $\mathcal{S}$ la surface de révolution obtenue par rotation de $\mathcal{C}$ autour de D .

D est la droite passant par O et dirigée par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace, on a

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \exists M_0 \in \mathcal{C} \quad \begin{cases} OM = OM' \\ \langle \overrightarrow{MM_0}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \rangle = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} x_0 y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ x + y + z = x_0 + y_0 + z_0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y_0 = \frac{1}{x_0} \\ z_0 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \\ x + y + z = x_0 + \frac{1}{x_0} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y_0 = \frac{1}{x_0} \\ z_0 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 - 2 \\ x + y + z = x_0 + \frac{1}{x_0} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y_0 = \frac{1}{x_0} \\ z_0 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2 \\ x_0^2 - (x + y + z)x_0 + 1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il nous faut savoir à quelle condition le polynôme $X^2 - (x + y + z)X + 1$ admet une racine réelle (celle-ci sera nécessairement non-nulle car le polynôme n'admet jamais 0 comme racine). Son discriminant est $(x + y + z)^2 - 4$, ainsi, il existe x_0 tel que $x_0^2 - (x + y + z)x_0 + 1 = 0$ si et seulement si $(x + y + z)^2 \geq 4$.

On en déduit que $M \in \mathcal{S}$ si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2$ et $(x + y + z)^2 \geq 4$.

Corrigé de l'exercice 17

1. Soit $f(x, y, z) = 2x^2 - 3yz + 4z - 1$. On a alors $\nabla f(x, y, z) = (4x, -3z, -3y + 4)$.

Le point $M(x, y, z)$ est singulier si et seulement si $\begin{cases} 4x = 0 \\ -3z = 0 \\ -3y + 4 \end{cases}$. Or le point de coordonnées

$\left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$ n'appartient pas à (S) . Ainsi tous les points de (S) sont réguliers.

2. Une équation du plan tangent à (S) en un point $M(a, b, c)$ est

$$4a(x - a) - 3c(y - b) + (4 - 3b)(z - c) = 0$$

3. La droite d'équations $\begin{cases} y = 2 \\ x = z \end{cases}$ est incluse dans le plan tangent en point $M(a, b, c)$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4a(x - a) - 3c(2 - b) + (4 - 3b)(x - c) = 0$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (4 + 4a - 3b)x - 2 - 2c = 0$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme ceci est équivalent à $\begin{cases} 4 + 4a - 3b = 0 \\ 2 - 2c = 0 \end{cases}$

(a, b, c) vérifie donc

$$\begin{cases} 2a^2 - 3bc + 4c - 1 = 0 \\ 4 + 4a - 3b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1)^2 - 3 = 0 \\ b = \frac{4+4a}{3} \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \\ b = \frac{4+4a}{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

Les plans tangents contenant la droite d'équations $\begin{cases} y = 2 \\ x = z \end{cases}$ sont ainsi les plans tangents en $A\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{8}{3} + \frac{4}{\sqrt{6}}, 1\right)$ et en $B\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{8}{3} - \frac{4}{\sqrt{6}}, 1\right)$.

Corrigé de l'exercice 18

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $u'' + u = 1$ est

$$\{t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t) + 1, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = \cos(t) + 3 \sin(t) + 1 \quad y(t) = \cos(t) - 3 \sin(t) + 1 \quad z(t) = 4 \cos(t) + 1$$

2. Un plan a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Il suffit alors d'injecter les expressions obtenues dans l'équation et d'identifier en utilisant la liberté de la famille $(\cos, \sin)$.

On constate toutefois aisément que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $2x(t) + 2y(t) - z(t) = 3$, ainsi Γ est incluse dans le plan d'équation $2x + 2y - z = 3$

3. Une sphère a pour équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ avec $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $r \geq 0$.

On constate que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} (x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 &= \cos^2(t) + 9 \sin^2(t) + 6 \cos(t) \sin(t) + \cos^2(t) + 9 \sin^2(t) - 6 \cos(t) \sin(t) \\ &= 18 \cos^2(t) + 18 \sin^2(t) \\ &= 18 \end{aligned}$$

Ainsi Γ est incluse dans la sphère de centre $\Omega(1, 1, 1)$ et de rayon $\sqrt{18}$.

4. Γ est incluse dans un plan et dans une sphère, elle est donc incluse dans leur intersection qui est le cercle d'équation $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 18 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$. Il nous faut toutefois prouver que Γ parcourt bien tout le cercle.

Posons $\vec{w} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{3}$, $\vec{u} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u} = \frac{-\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}}{3\sqrt{2}}$. Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est alors orthonormé

(Attention, un changement de repère quelconque va distordre les distances, il est alors important de considérer un changement de repère orthonormé pour que les distances soient préservées et pouvoir ainsi correctement interpréter la nature des objets.)

Si M a pour coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors il a pour coordonnées (X, Y, Z) dans $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 18 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}Z - 1 \right)^2 + \left(\frac{-X}{\sqrt{2}} + \frac{-Y}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}Z - 1 \right)^2 - \left(\frac{4Y}{3\sqrt{2}} - \frac{Z}{3} - 1 \right)^2 = 18 \\ Z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - 2Z + Y^2 + 2\sqrt{2}Y + X^2 + 3 = 18 \\ Z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + (Y + \sqrt{2})^2 = 18 \\ Z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On retrouve l'équation du cercle de rayon $\sqrt{18}$ et de centre le point Ω de coordonnées $(0, -\sqrt{2}, 1)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, c'est-à-dire le cercle de centre le point Ω de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de rayon 18.

Remarquons que, puisque le plan passait par le centre de la sphère on pouvait dès le début affirmer que le cercle était centré en $\Omega(1, 1, 1)$ et de rayon 18.

Dans notre nouveau repère Γ est paramétrée par

$$\begin{cases} X(t) = \frac{x(t) - y(t)}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} \sin(t) \\ Y(t) = \frac{-x(t) - y(t) - 4z(t)}{3\sqrt{2}} = -\sqrt{18} \cos(t) - \sqrt{2} \\ Z(t) = \frac{2x(t) + 2y(t) - z(t)}{3} = 1 \end{cases}$$

Ce paramétrage décrit exactement le cercle de rayon $\sqrt{18}$ et de centre le point Ω de coordonnées $(0, -\sqrt{2}, 1)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, c'est-à-dire le cercle de centre le point Ω de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de rayon 18.

Finalement Γ est le cercle de centre le point Ω de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de rayon 18.

Corrigé de l'exercice 19

1. D et Δ sont deux droites sécantes au point $A(1, 0, 0)$, elles sont coplanaires dans le plan d'équation $x = 1$.

Leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(0, 1, 1)$ et $\vec{v}(0, 1, -1)$ sont orthogonaux, ainsi D et Δ sont perpendiculaires.

2. (a) La matrice de la rotation d'angle θ d'axe dirigé et orienté par $\vec{k}$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La droite D passe par $A(1, 0, 0)$ et $B(1, 1, 1)$, l'image de A par la rotation est $A_\theta(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ et l'image de B est $B_\theta(\cos(\theta) - \sin(\theta), \sin(\theta) + \cos(\theta), 1)$.

D_θ est alors la droite $(A_\theta B_\theta)$, il s'agit de la droite passant par $A_\theta(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}_\theta(-\sin(\theta), \cos(\theta), 1)$.

Les vecteurs $\vec{v}_\theta(1, 0, \sin(\theta))$ et $\vec{w}_\theta(0, 1, -\cos(\theta))$ sont orthogonaux à $\vec{u}_\theta$ et forme une famille libre.

Ainsi D_θ a pour équations $\begin{cases} x + \sin(\theta)z = \cos(\theta) \\ y - \cos(\theta)z = \sin(\theta) \end{cases}$

(b) Soit $M(x, y, z)$, on a

$$\begin{aligned}
 M \in \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} D_\theta &\Leftrightarrow \exists(\theta, t) \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \cos(\theta) - t \sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) + t \cos(\theta) \\ z = t \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\theta, t) \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \cos(\theta) - z \sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) + z \cos(\theta) \\ t = z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\theta, t) \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x + yz}{1 + z^2} \\ \sin(\theta) = \frac{y - zx}{1 + z^2} \\ t = z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{x + yz}{1 + z^2} \right)^2 + \left(\frac{y - zx}{1 + z^2} \right)^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow (x + yz)^2 + (y - zx)^2 = (1 + z^2)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 z^2 + y^2 + z^2 x^2 = (1 + z^2)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - z^2 - 1)(1 + z^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi (S) est bien la réunion de droites D_θ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. On a $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$. Comme $O(0, 0, 0)$ n'appartient pas à (S) tous les points de (S) sont réguliers.

Le plan tangent à (S) en M_0 est le plan d'équation $2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$, i.e. $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0$.